## Normalspannung $\sigma$ aus Zug/Druck

$\sigma = F/A$; Vorzeichen: + Zug – Druck

## Tangentialspannung $\tau$ aus Querkräften

$\tau_m = Q/A$ = mittlere Schubspannung

## Gestaltänderung

bei Normalspannung: $\sigma = E \cdot \varepsilon$
mit Elastizitätsmodul $E$ in N/mm$^2$
und Dehnung $\varepsilon = \Delta L / L$
für Stahl: $E \approx 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm$^2$

bei Tangentialspannung: $\tau = G \cdot \gamma$
mit Gleitmodul $G$ in N/mm$^2$
und Gleitwinkel $\gamma$ in rad
für Stahl: $G \approx 8 \cdot 10^4$ N/mm$^2$

Zusammenhang
zwischen E und G: $G = \dfrac{E}{2 \cdot (1 + \nu)}$
Querkontraktionszahl $\nu = |\varepsilon_q/\varepsilon|$
mit $\varepsilon_q = \Delta d/d$ und $\Delta d < 0$ bei Zug
Für Stahl und viele andere Metalle gilt: $\nu \approx 0{,}3$

## Begriff der Steifigkeit:

Steifigkeit eines Zugstabes = Federsteifigkeit C

$$C = \frac{E \cdot A}{L} \qquad F = C \cdot \Delta L$$

Biegesteifigkeit eines Biegebalkens: $E \cdot I$
Torsionssteifigkeit eines Torsionsstabes: $G \cdot I_t$
mit $I_t = I_p$ (nur Kreis!) oder: 2. Bredtsche Formel

## Thermische Längenänderung

$$\varepsilon_T = \frac{\Delta L}{L} = \alpha \cdot \Delta T$$

mit Temperaturdifferenz $\Delta T = T_2 - T_1$ in K,
Wärmeausdehnungskoeffizient $\alpha$ in K$^{-1}$
Überlagerung mit mechanischer Dehnung:

$$\varepsilon_{ges} = \varepsilon + \varepsilon_T = \frac{\sigma}{E} + \alpha \cdot \Delta T$$

bei vollständiger Dehnungsbehinderung:

$$\varepsilon_{ges} = \varepsilon + \varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E} + \alpha \cdot \Delta T = 0$$

Wärmespannung $\sigma_T = -\alpha \cdot \Delta T \cdot E$

## Flächenpressung

Annahme: Flächenpressung p gleichmäßig verteilt innerhalb der Kontaktfläche.

$$p = F / A_{proj} \qquad \text{in N/mm}^2$$

mit $A_{proj}$=Projektion der Kontaktfläche $\perp$ zur Richtung der Kraft F

## Flächenträgheitsmomente

axial: $I_y = \int z^2 dA \qquad I_z = \int y^2 dA$

polar: $I_p = \int r^2 dA = I_y + I_z$

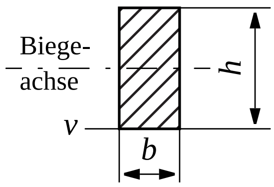
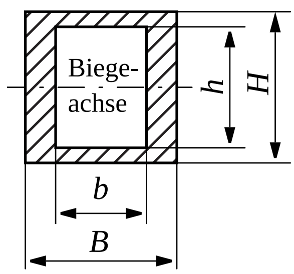
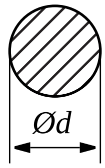
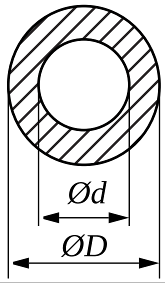
## Axiale Flächenträgheitsmomente $I$ und Biegewiderstandsmomente $W_b$

Merke: Flächenträgheitsmomente $I$ von Teilflächen um die *selbe* Achse dürfen addiert oder subtrahiert werden, aber niemals Widerstandsmomente $W_b$ oder $W_t$ !

Steinerscher Satz: Hauptträgheitsachse z durch den Schwerpunkt der Fläche $A$, v-Achse um den Betrag $\Delta y$ aus dem SP parallel verschoben:

$$I_v = I_z + \Delta y^2 \cdot A \qquad I_z = I_v - \Delta y^2 \cdot A$$

Das axiale Flächenträgheitsmoment $I$ einer Fläche um deren Schwereachse ist stets minimal.

| Querschnittsform | $I$ in mm$^4$, $W_b$ in mm$^3$ |
|---|---|
|   | um Biegeachse: $I = \dfrac{b \cdot h^3}{12}$ $W_b = \dfrac{I}{h/2} = \dfrac{b \cdot h^2}{6}$ um v-Achse: $I_v = \dfrac{b \cdot h^3}{3}$ |
|   | $I = \dfrac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{12}$ $W_b = \dfrac{I}{H/2} = \dfrac{B \cdot H^3 - b \cdot h^3}{6 \cdot H}$ |
|   | $I = \dfrac{\pi}{4} r^4 = \dfrac{\pi}{64} d^4$ $W_b = \dfrac{I}{d/2} = \dfrac{\pi}{32} d^3$ |
|   | $I = \dfrac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$ $W_b = \dfrac{I}{D/2} = \dfrac{\pi}{32} \cdot \dfrac{D^4 - d^4}{D}$ |

## Schwerpunktkoordinaten

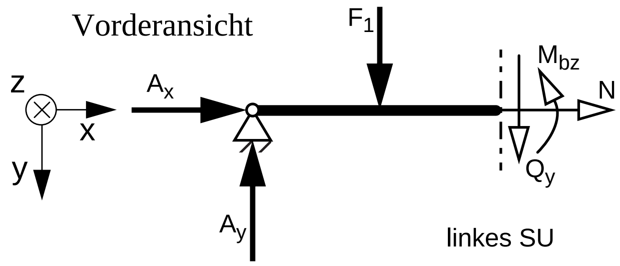
Flächenschwerpunkt:

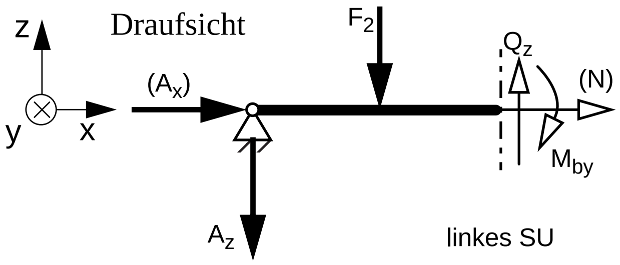
$$y_S = \frac{\sum (y_i \cdot A_i)}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2 + \ldots}{A_{ges}}$$

Linienschwerpunkt:

$$y_S = \frac{\sum (y_i \cdot L_i)}{\sum L_i} = \frac{y_1 L_1 + y_2 L_2 + \ldots}{L_{ges}}$$

## Positive Schnittlasten am Biegebalken




## beliebige Streckenlast q(x) und Schnittlasten Q(x), $M_b$(x)

$$q(x) \qquad q(x) = -\frac{d}{dx}Q(x)$$

$$Q(x) = -\int q(x)dx \qquad Q(x) = \frac{d}{dx}M_b(x)$$

$$M_b(x) = \int Q(x)dx \qquad M_b(x)$$

## Biegespannung bei Biegg. um z-Achse

$$\sigma_b = \sigma_b(y) = \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y$$

mit $\pm M_{bz}$ und $\pm y$ $\Rightarrow$ vorzeichenrichtiges $\sigma_b$

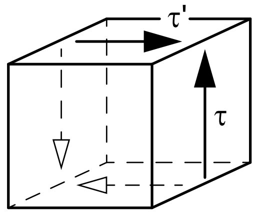
Zug: $\sigma_b$ positiv, Druck: $\sigma_b$ negativ

maximale Biegespannung $\sigma_{bmax}$ bei $y = e_{max}$

$$\sigma_{bmax} = \frac{M_{bz}}{W_{bz}} \qquad \text{mit } W_{bz} = \frac{I_z}{e_{max}}$$

## Zugeordnete Schubspannungen

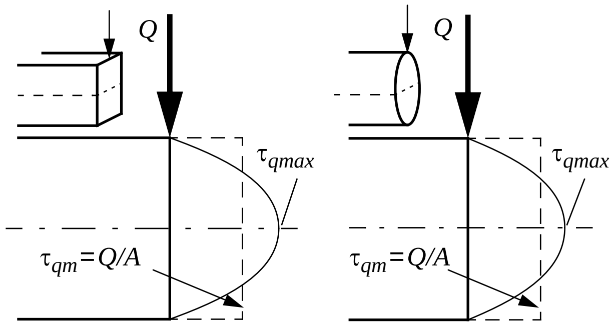
in zueinander ⊥ stehenden Ebenen: $\tau = \tau'$




## Beanspruchung durch Querkraft

Verlauf der Schubspannungen über der Höhe am Beispiel zweier Vollquerschnitte:

Rechteckquerschnitt Kreisquerschnitt




$\tau_{qmax} = 1{,}5 \cdot \tau_{qm} = 1{,}5 \cdot Q/(b \cdot h)$

$\tau_{qmax} = 4/3 \cdot \tau_{qm} = 4/3 \cdot Q/(r^2 \cdot \pi)$

## Beanspruchung durch Torsion

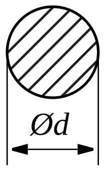
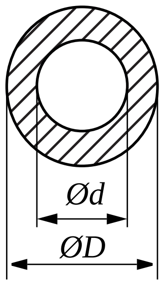
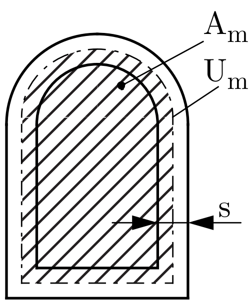
Torsionsspannung: $\tau_{tmax} = \dfrac{M_t}{W_t}$

Verdrehwinkel: $\varphi = \dfrac{M_t \cdot L}{I_t \cdot G}$ in rad,

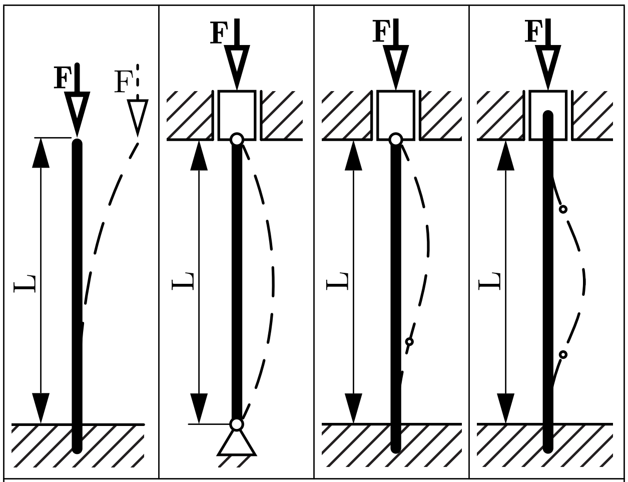
NUR bei Kreisprofil: $I_t = I_p$

mit: $M_t$ = Torsionsmoment, $L$ = Länge,
$I_p$ = polares Flächenträgheitsmoment,
$W_t$ = Torsionswiderstandsmoment
$G$ = Gleitmodul

Polare Flächenträgheitsmomente $I_p$ und Torsionswiderstandmomente $W_t$:

| Querschnittform | $I_p$ in mm$^4$, $W_t$ in mm$^3$ |
|---|---|
|  | $I_t = I_p = \dfrac{\pi}{32}d^4$<br>$W_t = \dfrac{I_p}{d/2} = \dfrac{\pi}{16}d^3$ |
|  | $I_t = I_p = \dfrac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$<br>$W_t = \dfrac{I_p}{D/2} =$<br>$= \dfrac{\pi}{16} \cdot \dfrac{D^4 - d^4}{D}$ |
| NUR bei Kreisprofil | $W_t = 2 \cdot W_b$ |
| dünnwandige geschlossene Querschnitte, z.B.<br> | 1. Bredtsche Formel:<br>$W_t = 2 \cdot A_m \cdot s_{min}$<br>$A_m$: mittlere umschl. Fläche<br>$s_{min}$: minimale Wanddicke |
| | 2. Bredtsche Formel:<br>$I_t = \dfrac{4 \cdot A_m^2}{\oint \dfrac{du}{s(u)}}$<br>und bei s = konst.:<br>$I_t = \dfrac{4 \cdot A_m^2 \cdot s}{U_m}$<br>$U_m$: mittlere Umfangslänge = Länge der Profilmittellinie |

## Knickung von Druckstäben der Länge L




| freie Knicklänge $L_K$ | | | |
|---|---|---|---|
| $L_K = 2 \cdot L$ | $L_K = L$ | $L_K \approx 0{,}7 \cdot L$ | $L_K = 0{,}5 \cdot L$ |

Schlankheitsgrad $\lambda = L_K \cdot \sqrt{\dfrac{A}{I_{min}}}$

Für schlanke Stäbe mit $\lambda \geq \lambda_{min}$:
Elastische Knickung nach Euler

Knickkraft $F_K = \dfrac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{L_K^2}$

Knickspannung $\sigma_K = \dfrac{F_K}{A} = \dfrac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$

Werte für $\lambda_{min}$ siehe nachfolgende Tabelle.

Für weniger schlanke Stäbe mit $\lambda < \lambda_{min}$:
Plastische Knickung nach Tetmajer:

| Werkstoff | $\lambda_{min}$ | $\sigma_K$ nach Tetmajer |
|---|---|---|
| S235 (St37) | 104 | $\sigma_K = 310 - 1{,}14 \cdot \lambda$ |
| E295 (St50)<br>E335 (St60) | 88 | $\sigma_K = 335 - 0{,}62 \cdot \lambda$ |
| 5%-Ni-Stahl | 86 | $\sigma_K = 470 - 2{,}30 \cdot \lambda$ |
| GJL200 (GG20)<br>($E = 10^5$ N/mm$^2$) | 80 | $\sigma_K = 776 - 12\lambda + 0{,}053\lambda^2$ |
| Bauholz<br>($E = 10^4$ N/mm$^2$) | 100 | $\sigma_K = 29{,}3 - 0{,}194 \cdot \lambda$ |

Sicherheit gegen Knicken: $S_K = \dfrac{\sigma_K}{\sigma_d} = \dfrac{F_K}{F_d}$

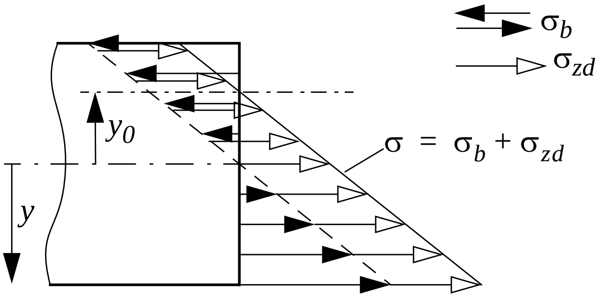
mit: Druckkraft $F_d$, Druckspannung $\sigma_d = F_d / A$

üblicher Bereich für $S_K$: 2…5

## Zusammengesetzte Beanspruchungen

Wenn mehrere Grundbeanspruchungen (Zug/ Druck, Biegung, Torsion, Querkraftschub) gleichzeitig an der selben Stelle wirken: Gleichartige Spannungen (nur $\sigma$ oder nur $\tau$) werden vektoriell addiert, aus ungleichartigen Spann. ($\sigma$ und $\tau$) wird eine Vergleichsspannung gebildet.

### Normalspannung aus Biegung $\sigma_b$ und Zug/Druck $\sigma_{zd}$




resultierende Normalspannung $\sigma$:

$$\sigma = \sigma(y) = \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y + \frac{N}{A}$$

Verschiebung $y_0$ der neutralen Faser ($\sigma = 0$):

$$y_0 = -\frac{N \cdot I_z}{A \cdot M_b}$$

### Normalspg. aus Biegung um 2 Achsen (Schiefe Biegung)

Biegung um z-Achse: $\sigma_{by} = \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y$

Biegung um y-Achse: $\sigma_{bz} = \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z$

$$\sigma = \sigma_{by} + \sigma_{bz} = \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y + \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z$$

Schiefe Biegung mit zusätzlicher Normalkraft N und überlagerter Zug- oder Druckspannung $\sigma_{zd}$

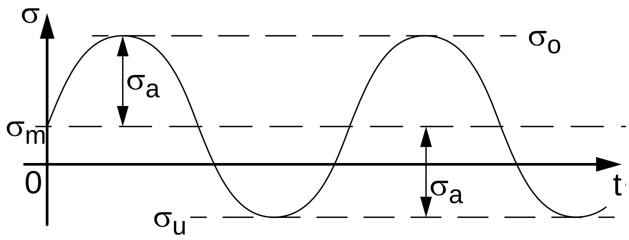
$$\sigma = \sigma_{by} + \sigma_{bz} + \sigma_{zd} = \frac{M_{bz}}{I_z} \cdot y + \frac{M_{by}}{I_y} \cdot z + \frac{N}{A}$$

Die Größen $M_{bz}$, $M_{by}$, $N$, $y$, $z$ müssen mit richtigem Vorzeichen eingesetzt werden, dann ergibt sich für jede Querschnittsstelle mit den Koordinaten *[y;z]* die vorzeichenrichtige Gesamtnormalspannung (Zug „+“, Druck „–“).

### Vergleichsspannung $\sigma_{vG}$ aus Normalspg. $\sigma$ und Tangentialspg. $\tau$

$$\sigma_{vG} = \sqrt{(\sigma_b + \sigma_{zd})^2 + 3 \cdot (\tau_q + \tau_t)^2}$$

## Dynamische Belastung




mit: $\sigma_o = \sigma_{max}$: Oberspannung

$\sigma_u = \sigma_{min}$: Unterspannung

$\sigma_m = (\sigma_o + \sigma_u)/2$ : Mittelspannung

$\sigma_a = (\sigma_o - \sigma_u)/2$ : Ausschlagspannung

Sonderfälle:

statisch: $\sigma_u = \sigma_o = \sigma_m$ ; $\sigma_a = 0$

wechselnd: $\sigma_u = -\sigma_o$ ; $\sigma_m = 0$ ; $\sigma_a = \sigma_o$

schwellend: $\sigma_u = 0$ ; $\sigma_m = \sigma_o/2$ ; $\sigma_a = \sigma_o/2$

## Spannungserhöhung durch Kerben

Formzahl (statisch und dynamisch)

$$\alpha_k = \frac{\text{max. Spannungsspitze}}{\text{Nennspannung}} > 1$$

## Dauerfestigkeitsminderung durch Kerben

Kerbwirkungszahl $\beta_k$ (nur dynamisch)

$$\beta_k = \frac{\text{Ausschlagfestigkeit ohne Kerbe}}{\text{Ausschlagfestigkeit mit Kerbe}}$$

$1 \le \beta_k \le \alpha_k$

## Sicherheitsfaktoren

Allgemein:

$$\text{Sicherheit } S = \frac{\text{Festigkeitswert}}{\text{auftretende Beanspruchung}}$$

$$\text{Bruchsicherheit } S_B = \frac{R_m}{\sigma_{max}}$$

mit $R_m$ : Mindest-Zugfestigkeit

Sicherheit gegen plastische Verformung (= Fließen)

$$S_F = \frac{R_e (\text{oder } R_{p0,2} \text{ oder } \sigma_{bF})}{\sigma_{max}}$$

mit $R_e$ : Elastizitätsgrenze (duktile Werkstoffe)
$R_{p0,2}$ : 0,2%-Dehngrenze (spröde Werkstoffe)
$\sigma_{bF}$ : Fließgrenze bei Biegebeanspruchung

Sicherheit gegen Dauerbruch

$$S_D = \frac{\text{Ausschlagfestigkeit } \sigma_{AK} \text{ am Bauteil}}{\text{auftretende Ausschlagspannung } \sigma_a}$$

mit $\sigma_{AK} = f(\sigma_m)$ aus Gestaltfestigkeitsdiagramm